



RESUMEN DE FÓRMULAS

ÁLGEBRA LINEAL

Tema 4. Espacios con Producto Interno



1) PROPIEDADES DE UN PRODUCTO INTERNO

1.- Simetría o conmutatividad:

$$(\bar{u}|\bar{v}) = (\bar{v}|\bar{u}) \leftarrow \text{Para números reales}$$

$$(\bar{u}|\bar{v}) = \overline{(\bar{v}|\bar{u})} \leftarrow \text{Para números complejos}$$

2.- Aditividad o distributividad:

$$(\bar{u}|\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u}|\bar{v}) + (\bar{u}|\bar{w})$$

3.- Homogeneidad:

$$(\alpha\bar{u}|\bar{v}) = \alpha(\bar{u}|\bar{v})$$

4.- Positividad:

$$(\bar{u}|\bar{u}) > 0 \quad \forall \bar{u} \neq 0$$

$$\text{ó } (\bar{u}|\bar{u}) = 0 \quad \text{si y sólo si } \bar{u} = 0$$

2) DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

$$|(\bar{u}|\bar{v})|^2 \leq (\bar{u}|\bar{u}) \cdot (\bar{v}|\bar{v}) \quad \text{ó} \quad |(\bar{u}|\bar{v})| \leq \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|$$

• Si $|(\bar{u}|\bar{v})|^2 = (\bar{u}|\bar{u}) \cdot (\bar{v}|\bar{v}) \leftarrow \bar{u}$ y $\bar{v}$ linealmente dependientes

• Si $|(\bar{u}|\bar{v})|^2 < (\bar{u}|\bar{u}) \cdot (\bar{v}|\bar{v}) \leftarrow \bar{u}$ y $\bar{v}$ linealmente independientes

3) MÓDULO DE UN ESCALAR

$$\alpha = a + bi \rightarrow |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{ó } \alpha = a - bi \rightarrow |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} \leftarrow \text{Para números complejos}$$

$$\alpha = a \rightarrow |\alpha| = \sqrt{a^2} = a \leftarrow \text{Para números reales}$$

4) NORMA DE UN VECTOR

$$\|\bar{u}\| = (\bar{u}|\bar{u})^{1/2} \quad \text{ó} \quad \|\bar{u}\|^2 = (\bar{u}|\bar{u})$$

5) VECTOR UNITARIO

$$\|\bar{u}\| = 1; \quad \text{ó} \quad \text{convertirlo con: } \bar{e} = \frac{1}{\|\bar{u}\|} \bar{u}$$

6) DESIGUALDAD DEL TRIÁNGULO

$$\|\bar{u} + \bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$$

7) ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

$$\cos \theta = \frac{(\bar{u}|\bar{v})}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|} \leftarrow \text{Para números reales}$$

$$\cos \theta \equiv \frac{R(\bar{u}|\bar{v})}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|} \leftarrow \text{Para números complejos}$$

8) DISTANCIA ENTRE DOS VECTORES

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = \|\bar{u} - \bar{v}\| = \|\bar{v} - \bar{u}\|$$

9) ORTOGONALIDAD ENTRE VECTORES

$$(\bar{u}|\bar{v}) = 0$$

$$\text{y } \theta = \cos^{-1}(0) = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

10) TEOREMA DE PITÁGORAS

$$\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2$$

NOTA: Aplica sólo cuando $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son ortogonales.



RESUMEN DE FÓRMULAS

ÁLGEBRA LINEAL

Tema 4. Espacios con Producto Interno



11) PROCESO DE GRAM-SCHMIDT

a) Para convertir $A = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}\}$ en base ortogonal:

$$\overline{w_1} = \overline{v_1}$$

$$\overline{w_2} = \overline{v_2} - \frac{(\overline{v_2} | \overline{w_1})}{(\overline{w_1} | \overline{w_1})} \overline{w_1}$$

b) Para convertir $A = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\}$ en base ortogonal:

$$\overline{w_1} = \overline{v_1}$$

$$\overline{w_2} = \overline{v_2} - \frac{(\overline{v_2} | \overline{w_1})}{(\overline{w_1} | \overline{w_1})} \overline{w_1}$$

$$\overline{w_3} = \overline{v_3} - \frac{(\overline{v_3} | \overline{w_1})}{(\overline{w_1} | \overline{w_1})} \overline{w_1} - \frac{(\overline{v_3} | \overline{w_2})}{(\overline{w_2} | \overline{w_2})} \overline{w_2}$$

c) En general, para convertir $A = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_i}\}$ en la base ortogonal $B_{OG} = \{\overline{w_1}, \overline{w_2}, \dots, \overline{w_i}\}$:

$$\overline{w_1} = \overline{v_1}$$

$$\overline{w_i} = \overline{v_i} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(\overline{v_i} | \overline{w_k})}{(\overline{w_k} | \overline{w_k})} \overline{w_k}$$

12) CONVERTIR BASE ORTOGONAL EN BASE ORTONORMAL

Para convertir $B_{OG} = \{\overline{w_1}, \overline{w_2}, \dots, \overline{w_i}\}$ en la base ortonormal $B_{ON} = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_i}\}$:

$$\overline{e_1} = \frac{1}{\|\overline{w_1}\|} \overline{w_1} ; \overline{e_2} = \frac{1}{\|\overline{w_2}\|} \overline{w_2} \dots$$

y en general: $\overline{e_i} = \frac{1}{\|\overline{w_i}\|} \overline{w_i}$

13) VECTOR DE COORDENADAS

a) De $\overline{v}$ en la base ortogonal $B_{OG} = \{\overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3}\}$:

$$\beta_1 = \frac{(\overline{v} | \overline{w_1})}{(\overline{w_1} | \overline{w_1})} ; \beta_2 = \frac{(\overline{v} | \overline{w_2})}{(\overline{w_2} | \overline{w_2})} ; \beta_3 = \frac{(\overline{v} | \overline{w_3})}{(\overline{w_3} | \overline{w_3})}$$

Siendo el vector de coordenadas: $(\overline{v})_{B_{OG}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$.

b) De $\overline{v}$ en la base ortonormal $B_{ON} = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$:

$$\gamma_1 = (\overline{v} | \overline{e_1}) ; \gamma_2 = (\overline{v} | \overline{e_2}) ; \gamma_3 = (\overline{v} | \overline{e_3})$$

Siendo el vector de coordenadas: $(\overline{v})_{B_{ON}} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}$.

14) COMPLEMENTO ORTOGONAL

$$W^\perp = \{\overline{v} \in V | (\overline{v} | \overline{u}) = 0 \quad \forall \overline{u} \in W\}$$

NOTA: Propiedad importante $\overline{v} = \overline{w_o} + \overline{w'}$, donde:

$\overline{v} \in V$ = Espacio vectorial

$\overline{w_o} \in W$ = Subespacio vectorial de V

$\overline{w'} \in W^\perp$ = Complemento ortogonal de W

15) PROYECCIÓN DE $\overline{v}$ SOBRE W

$$\overline{w_o} = \sum_{i=1}^n (\overline{v} | \overline{e_i}) \overline{e_i}$$

donde $\overline{v} \in V$ = Espacio vectorial

$\overline{e_i} \in$ Base ortonormal $B_{ON} = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_i}\}$